R 行列と箙 Hecke–Clifford スーパー代数の表現論

東京科学大学　大学院理学院　数学系数学コース
遠藤維人 (Koreto ENDO) *

概要

Khovanov–Lauda, Rouquier により導入された箙 Hecke 代数は，圏化理論や Schur–Weyl 双対性を介して Lie 代数，量子群の表現論，構造論と結びつき，現在大きく発展している．特に Schur–Weyl 双対性との関連で重要な対称箙 Hecke 代数の表現論においては，再正規化 R 行列と呼ばれる表現の射が中心的な役割を果たす．本稿では，対称箙 Hecke 代数のスーパー代数類似である対称箙 Hecke–Clifford スーパー代数の表現論について，Schur–Weyl 双対への応用や再正規化 R 行列を用いた表現論の研究について述べる．

1　導入

Schur–Weyl 双対性は，Lie 群や Lie 代数の表現論と有限群の表現論などを関連させて双方向的に研究することを可能にするという点で，非常に強力かつ興味深い現象である．最も古典的な例は，一般線形 Lie 代数 $\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$ と対称群 $\mathfrak{S}_d$ に関する次の主張である．

定理 1.1. $\Bbbk$ を標数 0 の代数閉体とする．このとき，$W = (\Bbbk^n)^{\otimes d}$ には互いに可換な $\mathfrak{gl}_n(\Bbbk), \mathfrak{S}_d$ の左作用が入り，$U(\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)) \otimes \Bbbk[\mathfrak{S}_d]$ 加群として次のように既約分解する．

$$W = \bigoplus_{\lambda \vdash d,\ l(\lambda) \leq n} V(\lambda) \otimes S^{\lambda}.$$

ここで，$V(\lambda)$ は最高ウェイト λ の既約 $\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$ 加群，S^{λ} は λ に自然に対応する $\mathfrak{S}_d$ の既約加群 (Specht 加群) である．

Schur–Weyl 双対性は，$\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$ だけではなくその “相方” である $\mathfrak{S}_d$ にも目を向けることによって重要な情報がもたらされるという指導原理を我々に与える．

この主張を雛形に，Schur–Weyl 双対性は非常に多くの一般化，類似の構成が試みられてきた．1 つの一般化の方向性として，(簡約)Lie 代数をアフィン化，または量子化したときに，うまく “相方” を見出すことにより Schur–Weyl 双対性を構築できないか？という問題がよく考察される．Jimbo[5] による $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ に対する Schur–Weyl 双対や Chari–Pressley[2] による $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ に対する Schur–Weyl 双対など，この発想は非常に多くの成果を生んだが，基本的にその “相方” の発見および Schur–Weyl 双対の構築は，Lie 代数の分類理論に基づいて個別具体的になされることが多く，統一理論のようなものは長らく存在しなかった．

* E-mail:endo.k.d6a6@m.isct.ac.jp

近年 Kang–Kashiwara–Kim[6] により，一般の量子アフィン代数に対する Schur–Weyl 双対性が，箙 Hecke 代数を用いることで構築された．ここでは $A_{n-1}^{(1)}$ $(n \geq 2)$ 型量子アフィン代数に対する結果を例示する．

定理 1.2 ([6, Theorem 3.3])**.** $\mathfrak{g} = \widehat{\mathfrak{sl}}_n$ を $A_{n-1}^{(1)}$ 型アフィン Lie 代数，$U_q'(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}$ に関する量子アフィン代数[*1]とする．このとき，$U_q'(\mathfrak{g})$ の標準加群の正規化 R 行列から A_∞ 型対称箙 Hecke 代数の族 $\{R_\beta\}_{\beta \in \mathsf{Q}^+}$ が構成でき，さらに標準加群のアフィン化の完備化テンソル積の有限直和として，$(U_q'(\mathfrak{g}), R_\beta)$ 両側加群 $\widehat{V}^{\otimes \beta}$ を構成できる．さらに，この両側加群は次の完全モノイダル関手を誘導する．

$$\bigoplus_{\beta \in \mathsf{Q}^+} \widehat{V}^{\otimes \beta} \otimes_{R_\beta} - : \bigoplus_{\beta \in \mathsf{Q}^+} R_\beta\text{-}\mathsf{gmod} \to U_q'(\mathfrak{g})\text{-}\mathsf{mod}.$$

もう 1 つの一般化として，Lie 代数をスーパー Lie 代数に置き換えるという方向性が考えられる．単純スーパー Lie 代数の分類は Kac[9] によりなされ，その一部は単純 Lie 代数の直接的な一般化と捉えられるが，そうではないものであって Schur–Weyl 双対が構築可能であるものがいくつか存在する．その中でも特に興味深いのが，Sergeev[13] によるクイヤースーパー Lie 代数 $\mathfrak{q}_n$ に対する Schur–Weyl 双対である．

定理 1.3 ([13],[4, Theorem 3.49])**.** $\Bbbk$ を標数 0 の代数閉体とする．このとき，$W = (\Bbbk^{n|n})^{\otimes d}$ には互いに (スーパー) 可換な $\mathfrak{q}_n(\Bbbk), \mathcal{H}_d$ の左作用が入り，$U(\mathfrak{q}_n(\Bbbk)) \otimes \mathcal{H}_d$ 加群として次のように既約分解する．

$$W = \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{SP}_d,\ l(\lambda) \leq n} V(\lambda) \circledast D^\lambda.$$

ここで，$V(\lambda)$ は最高ウェイト λ の既約 $\mathfrak{q}_n(\Bbbk)$ 加群，D^λ は λ に自然に対応する $\mathcal{H}_d$ の既約加群であり，$V(\lambda) \circledast D^\lambda$ は $V(\lambda) \otimes D^\lambda$ の既約部分加群である．

この定理は一般線形スーパー Lie 代数 $\mathfrak{gl}_{m|n}(\Bbbk)$ に対する Schur–Weyl 双対に手を加え，$\Bbbk[\mathfrak{S}_d]$ を拡大した Sergeev スーパー代数 $\mathcal{H}_d$ を “相方” として見出すことにより示すことができる．

これまでに挙げた 2 つの一般化を組み合わせて考えれば，Sergeev スーパー代数を構成する要領で箙 Hecke 代数をうまく拡大した代数系を考えることにより，$\mathfrak{q}_n$ に対する Schur–Weyl 双対の量子アフィン類似が得られるのではないかと期待できる．本稿ではそのような構成をうまく実現した代数系として，Kang–Kashiwara–Tsuchioka[7] により導入された箙 Hecke–Clifford スーパー代数を紹介し，それを用いた Schur–Weyl 双対とその表現論に対する考察について紹介する．

2 箙 Hecke 代数

まずは箙 Hecke 代数について説明しよう．元々箙 Hecke 代数は，対称化可能な Kac–Moody Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対する量子群の負部分 $U_q^-(\mathfrak{g})$ を圏化するために導入された代数である．

ここで代数の量子化について軽く説明しておく．代数 A の量子化とは，標語的には，パラメータの役割をする不定元 q を伴った代数 $\{A_q\}$ であって “極限”$q \mapsto 1$ をとると A が復元されるようなもの

[*1] 正確には次数作用素を抜いた版の量子アフィン代数に相当する．

である．対称化可能な Kac–Moody Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して，それと全く同じ表現論を持つ代数 $U(\mathfrak{g})$(普遍包絡代数という) を作ることができ，その量子化 $U_q(\mathfrak{g})$ も得られる．これを $\mathfrak{g}$ の**量子群**という．

Khovanov–Lauda[8]，Rouquier[12] による圏化定理の具体的な主張はおおよそ次のようにまとめることができる．

定理 2.1 ([8, Proposition 3.18],[12, Proposition 4.2])**.** 任意に対称化可能な Cartan データ $(A, P, \Pi, P^\vee, \Pi^\vee)$ を固定し，これを用いて量子群 $U_q(\mathfrak{g})$，箙 Hecke 代数の族 $\{R_\beta\}_{\beta\in \mathsf{Q}^+}$ を構成しておく．このとき，$\mathbb{Q}(q)$ 代数としての次の同型が成り立つ．

$$U_q^-(\mathfrak{g}) \simeq \mathbb{Q}(q) \otimes_{\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]} \bigoplus_{\beta\in \mathsf{Q}^+} K(R_\beta\text{-}\mathsf{gproj})$$

この箙 Hecke 代数 R_β は $\mathbb{Z}$ 次数付き代数なので，加群としても次数付き加群を考えるのが自然である．次数付き有限生成射影加群と次数を保つ射全体の圏を R_β-gproj で表していて，$K(R_\beta\text{-}\mathsf{gproj})$ はその Grothendieck 群である．

Lie 理論におけるこのような圏化定理の源流となっているのは，Ariki[1] による A 型円分 Hecke 代数を用いた $U(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ のとある既約表現の圏化定理である．これをもって，A 型アフィン Hecke 代数を任意の型に一般化するような $\mathbb{Z}$ 次数付き代数の存在が示唆され，それが箙 Hecke 代数の発見につながったのである．

導入で述べたように Chari–Pressley[2] によれば $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ と A 型アフィン Hecke 代数との間には Schur–Weyl 双対があるのであった．圏化定理に対する大幅な一般化が箙 Hecke 代数に対して成功したのだから，アフィン量子群に対する Schur–Weyl 双対も箙 Hecke 代数を用いて一般的に構築可能なのではないだろうか，という期待が生じる．さらに言えば，量子アフィン代数の表現に対して行うことができる操作が箙 Hecke 代数の表現の側でも可能であり，それらが Schur–Weyl 関手と整合的であればとても嬉しい．

この問いに肯定的に答えたのが，先述した Kang–Kashiwara–Kim[6] による Schur–Weyl 双対定理である．これによれば対称箙 Hecke 代数の表現論と量子アフィン代数の表現論が完全かつモノイダルな Schur–Weyl 関手によって強く結びついていることが観察できる．量子アフィン代数のある種の表現に対しては**アフィン化**という操作や**正規化 R 行列**と呼ばれる特別な加群の射が存在するのだが，対応する構成を行うためには対称な箙 Hecke 代数を用いる必要がある．そのため，Schur–Weyl 双対を考える上では箙 Hecke 代数に対称であることを課すことは自然であると考えられる．

3　スーパー Lie 代数とその一般化

Lie 代数の自然な一般化であるスーパー Lie 代数について簡単に説明する．これは与えられた $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 次数に基づいて Lie 代数の関係式を捻ったものとして理解される．

定義 3.1. $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}$ を体 $\Bbbk$ 上の $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 次数付きベクトル空間，$[-,-]\colon \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ を双線形写像とする．$x \in \mathfrak{g}_i$ のとき x は斉次であるといい，$i = \mathrm{par}(x)$ と書くことにする．$(\mathfrak{g}, [-,-])$ が**スーパー Lie 代数**であるとは，任意の斉次な $\mathfrak{g}$ の元に対して次が満たされることをいう．

(i) $[x, y] = -(-1)^{\mathrm{par}(x)\,\mathrm{par}(y)}[y, x]$,

(ii) $[a,[b,c]] = [[a,b],c] + (-1)^{\mathrm{par}(a)\,\mathrm{par}(b)}[b,[a,c]]$.

□

Lie 代数の満たすべき関係式は次のものであったことを思い出そう．

(i) $[x,y] = -[y,x]$,

(ii) $[a,[b,c]] = [[a,b],c] + [b,[a,c]]$.

スーパー Lie 代数としての Lie 代数とは，$\mathfrak{g}_1 = 0$ であるようなスーパー Lie 代数 $\mathfrak{g}$ のことである．より一般に，スーパー Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対し，部分空間 $\mathfrak{g}_0$ は Lie 代数である．一方で，$\mathfrak{g}$ の $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 次数を忘れたものは一般には Lie 代数ではない．本稿で重要なスーパー Lie 代数の例は次の 2 つである．

例 3.2. $V = \Bbbk^m \oplus \Bbbk^n$ を V の $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 次数付けとする．V 上の線形写像全体 $\mathrm{End}_{\Bbbk}(V)$ を $\mathfrak{gl}_{m|n} = \mathfrak{gl}(V)$ と表すことにすると，これは次のようなスーパー代数構造を持つ．

$$\begin{aligned} \mathfrak{gl}(V) &= \mathfrak{gl}(V)_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{gl}(V)_{\bar{1}}, \\ \mathfrak{gl}(V)_{\bar{i}} &= \{ f \in \mathfrak{gl}_{m|n}(\Bbbk) \mid f(V_{\bar{j}}) \subset V_{\overline{i+j}} \}, \\ [f,g] &= fg - (-1)^{\mathrm{par}(f)\,\mathrm{par}(g)} gf \ (f, g \text{ は斉次}). \end{aligned}$$

これを**一般線形スーパー Lie 代数 (general linear Lie superalgebra)** という．$n = 0$ の場合は一般線形 Lie 代数に一致する．

例 3.3. $V = \Bbbk^n \oplus \Bbbk^n$ を V の $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 次数付けとする．一般線形スーパー Lie 代数 $\mathfrak{gl}_{n|n}$ の元 J を

$$J = \sqrt{-1} \left[\begin{array}{c|c} 0 & I_n \\ \hline -I_n & 0 \end{array} \right]$$

と定める．ここで I_n は n 次単位行列であり，行列の区分けは V の次数付けに則したものである．これを用いて $\mathfrak{gl}_{n|n}$ の部分空間 $\mathfrak{q}_n$ を

$$\mathfrak{q}_n = \{ f \in \mathfrak{gl}_{n|n} \mid [f, J] = 0 \}$$

と定めると，これは $[-,-]$ の制限で閉じている．すなわち $\mathfrak{q}_n$ は $\mathfrak{gl}_{n|n}$ の部分スーパー Lie 代数である．これを**クイヤースーパー Lie 代数 (queer Lie superalgebra)** という．$\mathfrak{gl}_{m|n}$ とは異なり $\mathfrak{q}_n$ に対しては $n = 0$ とすることが意味を持たないので，$\mathfrak{q}_n$ はスーパー Lie 代数の理論固有の対象である．

Lie 理論における古典的な結果として Dynkin 図形による単純 Lie 代数の分類理論は非常に有名であり，その類似として単純スーパー Lie 代数の分類も行われている ([9])．$\mathfrak{gl}_{m|n}, \mathfrak{q}_n$ の部分商として単純スーパー Lie 代数の無限系列を構成することができ，それぞれ A 型，Q 型単純スーパー Lie 代数と呼ばれる．

導入で触れたとおり $\mathfrak{gl}_{m|n}, \mathfrak{q}_n$ に対しては Schur–Weyl 双対が構築可能であることが知られており，これにより $\mathfrak{gl}_{m|n}, \mathfrak{q}_n$ の有限次元多項式表現の圏は半単純になることがわかる．(classical な) 単純スーパー Lie 代数の中でこの性質を満たすものは $\mathfrak{gl}_{m|n}, \mathfrak{q}_n$ の他には $\mathfrak{osp}(1|2m)$ $(m \geq 1)$ しか知ら

れていない[*2](Ehrig–Stroppel).この意味で $\mathfrak{gl}_{m|n}, \mathfrak{q}_n$ は非常に興味深い対象である.

単純 Lie 代数の拡張理論として，1 変数ローラン多項式環をテンソルすることにより得られる**アフィン Lie 代数**と，それらの普遍包絡環を量子変形することにより得られる量子群が重要である.

スーパー Lie 代数に対する類似の拡張として，ここでは Kuniba–Okado–Sergeev[11] により導入された一般化 A 型アフィン量子群 $\mathcal{U}(\epsilon)$ を紹介する．これは $\mathfrak{gl}_{m|n}$ の量子アフィン化のさらなる一般化である.

例 3.4. $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ を n 個の $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の元の組とし，これを用いて添字集合 $I = \{0 < \cdots < n-1\} = I_{\mathsf{even}} \sqcup I_{\mathsf{odd}}$ の $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 次数付け $I = I_{\mathsf{even}} \sqcup I_{\mathsf{odd}}$ を決める．これに対し，$\Bbbk$ 上の $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 次数付き代数 $\mathcal{U}(\epsilon)$ が，k_μ, e_i, f_i $(\mu \in P, 0 \leq i \leq n-1)$ により生成され然るべき関係式を満たすものとして定義される.

各生成元は斉次であり，その次数は次のように定める.

$$\mathrm{par}(k_\mu) = \bar{0},\ \mathrm{par}(e_i) = \mathrm{par}(f_i) = \begin{cases} \bar{0} & \text{if } i \in I_{\mathsf{even}}, \\ \bar{1} & \text{if } i \in I_{\mathsf{odd}}. \end{cases}$$

$\mathcal{U}(\epsilon)$ を A **型一般化アフィン量子群**という.

関係式は複雑なので割愛した．$\epsilon = (\bar{0}, \ldots, \bar{0}, \bar{1}, \ldots, \bar{1})$ の場合が $U_q'(\widehat{\mathfrak{sl}}_{m|n})$ に対応する.

導入で触れた Kang–Kashiwara–Kim[6] による Schur–Weyl 双対と同様の構成が $\mathcal{U}(\epsilon)$ に対して一般化できることが Kwon–Lee[10] により示されている.

定理 3.5 ([10, Proposition 5.4])**.** $\mathcal{U}(\epsilon)$ の標準加群の正規化 R 行列から A_∞ 型対称箙 Hecke 代数の族 $\{R_\beta\}_{\beta \in \mathsf{Q}^+}$ が構成でき，さらに標準加群のアフィン化の完備化テンソル積の有限直和として $(U_q'(\mathfrak{g}), R_\beta)$ 両側加群 $\widehat{V}^{\otimes\beta}$ を構成できる．さらに，この両側加群は次の完全モノイダル関手を誘導する.

$$\bigoplus_{\beta \in \mathsf{Q}^+} \widehat{V}^{\otimes\beta} \otimes_{R_\beta} - \colon \bigoplus_{\beta \in \mathsf{Q}^+} R_\beta\text{-}\mathsf{gmod} \to \mathcal{C}(\epsilon).$$

ここで $\mathcal{C}(\epsilon)$ は $\mathcal{U}(\epsilon)$ の “多項式表現” 全体のなす圏である.

この関手によりそれぞれの圏の単純対象の間に対応が得られ，その対応はそれぞれの単純対象の構成および分類と整合することが知られている.

4　対称箙 Hecke–Clifford スーパー代数

Kang–Kashiwara–Tsuchioka[7] により，箙 Hecke 代数のスーパー代数類似と捉えられる 2 種類のスーパー代数が与えられた．箙 Hecke スーパー代数と箙 Hecke–Clifford スーパー代数である.

定義 4.1 ([7])**.** 一般化スーパー Cartan データ $(A, P, \Pi, P^\vee, \Pi^\vee)$ を固定する．Cartan 行列 A の添字集合 I は $I = I_{\mathsf{even}} \sqcup I_{\mathsf{odd}}$ と次数付けられている．これに対し**箙 Hecke スーパー代数** R_β が，斉次な生成元 $e(\nu), x_i, \tau_k$ $(\nu \in I^\beta, 1 \leq i \leq \mathrm{ht}\,\beta, 1 \leq k < \mathrm{ht}\,\beta)$ により生成され，然るべき関係式を満

*2 $\mathfrak{osp}(1|2m)$ はより広く有限次元表現の圏が完全可約であり，$\mathfrak{gl}_{m|n}, \mathfrak{q}_n$ の場合とも事情が異なる例外である.

たす代数として定義される．ここで，各生成元の $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 次数は次のように定義される．

$$\mathrm{par}(e(\nu)) = \overline{0},\ \mathrm{par}(x_i e(\nu)) = \mathrm{par}(\nu_i),\ \mathrm{par}(\tau_k e(\nu)) = \mathrm{par}(\nu_k)\,\mathrm{par}(\nu_{k+1})$$

箙 Hecke スーパー代数が対称であるとき，添字集合 I の次数付けは $I = I_{\mathsf{even}}$ の形しかあり得ず，これより生成元の次数は全て $\overline{0}$ になる．すなわち，対称な箙 Hecke スーパー代数は単なる箙 Hecke 代数である．

定義 4.2 ([7])**.** 一般化 (スーパー)Cartan データ $(A, P, \Pi, P^\vee, \Pi^\vee)$ を固定する．Cartan 行列 A の添字集合 I の次数付け $I = I_{\mathsf{even}} \sqcup I_{\mathsf{odd}}$ を用いて新たに添字集合 $J = I_{\mathsf{even}} \times \{0, 1\} \sqcup I_{\mathsf{odd}} \times \{0\}$ を作る．これに対し**箙 Hecke–Clifford スーパー代数** RC_β が，斉次な生成元 $e(\nu), x_i, \mathsf{c}_i, \tau_k$ $(\nu \in J^\beta, 1 \leq i \leq \mathrm{ht}\,\beta, 1 \leq k < \mathrm{ht}\,\beta)$ により生成され，然るべき関係式を満たす代数として定義される．ここで，各生成元の $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 次数は次のように定義される．

$$\mathrm{par}(e(\nu)) = \mathrm{par}(x_i) = \mathrm{par}(\tau_k) = \overline{0},\ \mathrm{par}(\mathsf{c}_i) = \overline{1}$$

箙 Hecke スーパー代数の場合とは異なり，対称箙 Hecke–Clifford スーパー代数は非自明なスーパー代数構造を持つ．筆者は本当の意味でスーパー代数の理論が登場する Schur–Weyl 双対定理に興味があるため，本稿では対称箙 Hecke–Clifford スーパー代数の表現論について考える．

5 主結果

対称箙 Hecke 代数が持つ大きな特徴として表現のアフィン化や R 行列の存在があり，同様の構成が箙 Hecke–Clifford スーパー代数に対しても可能なのではないかという疑問が必然的に生じる．筆者はこの点について研究を行い，対称箙 Hecke–Clifford スーパー代数の表現に対してもアフィン化，R 行列の構成が可能であることを示した．

命題 5.1. $M \in RC_\beta$-sgMod に対し，空間 M_z を

$$M_z = \Bbbk[z] \otimes_\Bbbk M$$

とすると，M_z には RC_β の作用が定義できる．これを M の**アフィン化**という．

ここで，RC_β-sgMod は $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 次数付き加群の圏である．アフィン化に対する R 行列を用いることにより，次のような 0 ではない加群の射を構成することができる．

命題 5.2. $M \in RC_\beta$-sgmod$, N \in RC_\gamma$-sgmod を 0 ではない有限次元次数付き加群としたとき，それらのテンソル積の上に次のような 0 ではない $RC_{\beta+\gamma}$ 加群の射が存在する．

$$r_{M,N}, r'_{M,N} \colon M \circ N \to N \circ M$$

これらを**再正規化 R 行列**という．

箙 Hecke 代数に対しても $r_{M,N}, r'_{M,N}$ が定義され，これらはスカラー倍を除いて一致することが知られているが，箙 Hecke–Clifford スーパー代数についても一致するかは未だわかっていない．

一方で，再正規化 R 行列を用いて既約表現のテンソル積の構造を調べることにより，実既約表現と呼ばれるものに対しては 2 つの再正規化 R 行列がスカラー倍を除いて一致することを示すことができる．

定理 5.3. $M_i \in RC_{\beta_i}$-sgmod $(i = 1, 2)$ は既約で，どちらかは実既約であるとする．このとき，

$$\mathrm{HOM}_{RC_{\beta_1+\beta_2}}(M_1 \circ M_2, M_2 \circ M_1) = \Bbbk . r_{M_1,M_2}$$

である．特に，$r'_{M_1,M_2} \in \Bbbk^{\times} r_{M_1,M_2}$ である．

これらの結果は，箙 Hecke–Clifford スーパー代数の表現論においても，量子アフィン (スーパー) 代数の表現論に類似した構成が可能であることを示している．

これを受けて，筆者は $\mathcal{U}(\epsilon)$ に対する Schur–Weyl 双対に手を加えることにより，$\mathfrak{q}_n$ の量子アフィン化に対応すると思しき $\mathcal{U}(\epsilon)$ の部分代数に対する Schur–Weyl 双対を構築した．

定理 5.4. $\mathcal{U}(\epsilon)$ のベクトル表現 $\mathcal{W}_{1,\epsilon}$ 上の奇な対合射 P を固定する．任意の $\beta \in \mathsf{Q}^+$ に対して P と $\mathrm{End}(V_{\mathbb{O}}^{\prime\otimes\beta})$ 内でスーパー可換な元全体のなす $\mathcal{U}(\epsilon)$ の部分代数を $\mathcal{U}(\epsilon)^P$，$\mathrm{End}(V_{\mathbb{O}}^{\mathsf{tw}\otimes\beta})$ 内で変換 $T \circ P$ とスーパー可換な元全体のなす $\mathcal{U}(\epsilon)$ の部分代数を $\mathcal{U}^{\mathsf{tw}}(\epsilon)^P$ とすると，以下の両側加群

$$\mathcal{U}(\epsilon)^P \curvearrowright V_{\mathbb{O}}^{\prime\otimes\beta} \curvearrowleft RC_\beta,$$
$$\mathcal{U}^{\mathsf{tw}}(\epsilon)^P \curvearrowright V_{\mathbb{O}}^{\mathsf{tw}\otimes\beta} \curvearrowleft RC_\beta$$

が構成でき，これはそれぞれの有限次元加群の間の関手を誘導する．

$$\mathcal{F}_\epsilon^P = \bigoplus_\beta V_{\mathbb{O}}^{\prime\otimes\beta} \otimes_{RC_\beta} - : \bigoplus_\beta RC_\beta\text{-sgmod} \to \mathcal{U}(\epsilon)^P\text{-smod},$$
$$\mathcal{F}_\epsilon^{\mathsf{tw}P} = \bigoplus_\beta V_{\mathbb{O}}^{\mathsf{tw}\otimes\beta} \otimes_{RC_\beta} - : \bigoplus_\beta RC_\beta\text{-sgmod} \to \mathcal{U}^{\mathsf{tw}}(\epsilon)^P\text{-smod}.$$

ここで，変換 T とは有理式 $f(z) \in \Bbbk((z-a))$ $({}^{\exists}a \in \Bbbk^{\times})$ に対し，$f(z) \leftrightarrow f(z^{-1})$ とする変換である．

また，これらの関手の基本性質としてモノイダル完全性が成り立つことも示した．

定理 5.5. 上の関手 $\mathcal{F}_\epsilon^P, \mathcal{F}_\epsilon^{\mathsf{tw}P}$ はモノイダル完全関手である．すなわち，任意の $M_i \in RC_{\beta_i}$-sgmod $(i = 1, 2)$ に対し，以下が成り立つ．

$$\mathcal{F}_\epsilon^P(M_1 \circ M_2) \simeq \mathcal{F}_\epsilon^P(M_1) \otimes \mathcal{F}_\epsilon^P(M_2),$$
$$\mathcal{F}_\epsilon^{\mathsf{tw}P}(M_1 \circ M_2) \simeq \mathcal{F}_\epsilon^{\mathsf{tw}P}(M_1) \otimes \mathcal{F}_\epsilon^{\mathsf{tw}P}(M_2).$$

$\mathfrak{q}_n$ の量子アフィン化として Chen–Guay[3] によりねじれ Q 型量子アフィンスーパー代数 $U_q(\widehat{\mathfrak{q}}_n^{\mathsf{tw}})$ が提出されているが，$U_q(\widehat{\mathfrak{q}}_n^{\mathsf{tw}})$ のベクトル表現のアフィン化の上の標準的な奇対合射として $T \circ J$ がとれる．筆者はここで与えた構成法を用いることで $U_q(\widehat{\mathfrak{q}}_n^{\mathsf{tw}})$ に対する Schur–Weyl 双対を与えることができると期待している*3.

*3 $U_q(\widehat{\mathfrak{q}}_n^{\mathsf{tw}})$ とアフィン Hecke–Clifford スーパー代数との Schur–Weyl 双対はすでに [3] により与えられており，[7] によれば箙 Hecke–Clifford スーパー代数とアフィン Hecke–Clifford スーパー代数の関係性は，ちょうど箙 Hecke 代数とアフィン Hecke 代数の関係性と同じものであることがわかる．[2] による Schur–Weyl 双対が [6] により一般化された流れと同様のことが [3] による $U_q(\widehat{\mathfrak{q}}_n^{\mathsf{tw}})$ に対する Schur–Weyl 双対に対しても起きることを期待することは自然であろう．

参考文献

[1] Ariki, S.: *On the decomposition numbers of the Hecke algebra of* $G(M,1,n)$. J. Math. Kyoto Univ. 36, 789–808 (1996).

[2] Chari, V.; Pressley, A.: *Quantum affine algebras and affine Hecke algebras.* Pacific J. Math. **174** (1996), no. 2, 295–326.

[3] Chen, H.; Guay, N.: *Twisted affine Lie superalgebra of type Q and quantization of its enveloping superalgebra.* Math. Z. **272** (2012), no. 1–2, 317–347.

[4] Cheng, S.-J.; Wang, W. *Dualities and representations of Lie superalgebras.* Grad. Stud. Math., 144. American Mathematical Society, Providence, RI, 2012. xviii+302 pp.

[5] Jimbo, M.: *A q-analogue of* $U(\mathfrak{gl}(N+1))$*, Hecke algebra, and the Yang–Baxter equation.* Lett. Math. Phys. **11** (1986), no. 3, 247–252.

[6] Kang, S.-J.; Kashiwara, M.; Kim, M.: *Symmetric quiver Hecke algebras and R-matrices of quantum affine algebras.* Invent. Math. **211** (2018), no. 2, 591–685.

[7] Kang, S.-J.; Kashiwara, M.; Tsuchioka, S.: *Quiver Hecke superalgebras.* J. Reine Angew. Math. **711** (2016), 1–54.

[8] Khovanov, M.; Lauda, A. D.: *A diagrammatic approach to categorification of quantum groups I* Represent. Theory **13** (2009), 309–347.

[9] Kac, V. G.: *Lie superalgebras.* Advances in Math. **26** (1977), no. 1, 8–96.

[10] Kwon, J.-H., Lee, S.-M.: *Super duality for quantum affine algebras of type A.* Int. Math. Res. Not. IMRN 2022, no. 23, 18446–18525.

[11] Kuniba, A.; Okado, M.; Sergeev, S.: *Tetrahedron equation and generalized quantum groups.* J. Phys. A **48** (2015), no. 30, 304001, 38 pp.

[12] Rouquier, R.: *2–Kac–Moody algebras.* preprint. arXiv:0812.5023.

[13] Sergeev, A. N.: *Tensor algebra of the identity representation as a module over the Lie superalgebras* $\mathfrak{Gl}(n,m)$ *and* $Q(n)$. Mat. Sb. (N.S.) **123(165)** (1984), no. 3, 422–430.